Concours pour l'admission en formation des ingénieurs de l'École nationale supérieure maritime au titre de l'année 2015

Mathématiques

(Durée : 2 heures)

Tout document est interdit. L'usage d'une calculatrice électronique à fonctionnement autonome, non programmable, non programmée, non imprimante, avec entrée unique par clavier est seul autorisé.
Délits de fraude :"tout candidat pris en flagrant délit de fraude ou convaincu de tentative de fraude sera immédiatement exclu de la salle d'examen (sa note sera égale à zéro) sans préjudice de l'application des sanctions prévues par les lois et règlements en vigueur réprimant les fraudes dans les examens et concours publics".

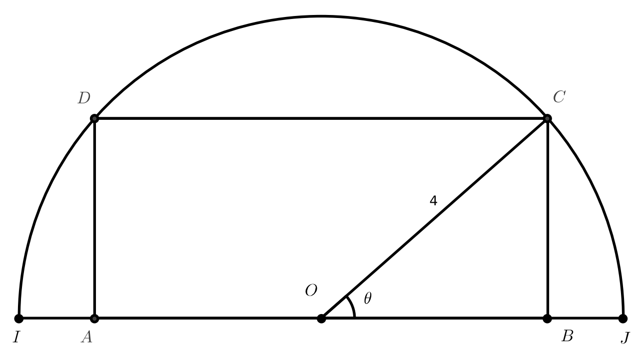
1^{re} Question (Valeur = 3)

On se place dans le plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$, et on considère pour tout nombre $\alpha \in \mathbb{C}$, le point M_α d'affixe $\alpha^2 - \alpha$.

1. On considère les points M_α et $M_{\alpha+3}$.
   (a) Montrer que O est le milieu de $[M_\alpha M_{\alpha+3}]$ lorsque $\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0$.
   (b) En déduire les valeurs de α pour lesquelles O est le milieu de $[M_\alpha M_{\alpha+3}]$
2. Montrer que lorsque $|\alpha - \frac{1}{2}| = 2$ alors M_α est sur un cercle de rayon 4 et de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{4}$
3. On suppose ici qu'il existe $\theta \in [-\pi; 0]$ tel que $\alpha = e^{i\theta}$.
   (a) Montrer que $\alpha^2 - \alpha = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{3\theta+\pi}{2}\right)}$.
   (b) En déduire un argument de $\alpha^2 - \alpha$ en fonction de θ.

2^{me} Question (Valeur = 3)

Un rectangle ABCD est inscrit dans un demi-cercle de centre O, de diamètre [IJ] et de rayon 4cm. On note θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{BOC}$ telle que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

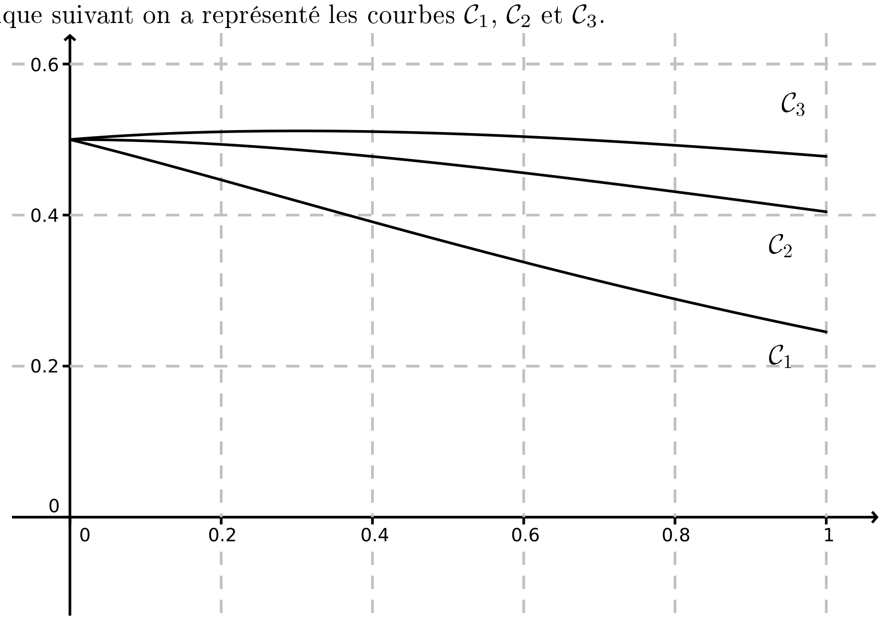


1. Démontrer que l'aire du rectangle ABCD est donnée en fonction de θ par la fonction f définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par
$$f(\theta) = 16\sin(2\theta).$$
2. Déterminer pour quelles de valeurs de θ, l'aire du rectangle ABCD est la plus grande et donner alors les dimensions de ce rectangle.
3. Montrer qu'il existe deux valeurs de θ pour lesquelles l'aire de ABCD est 10cm^2. Donner les valeurs de θ à 10^{-1} près.

3$^{\text{me}}$ Question (Valeur = 5)

La famille de fonctions f_n est définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;1]$ par
$$f_n(t) = \frac{t+1}{t+2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}.$$
On note $\mathcal{C}_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la courbe représentative de la fonction f_n et on considère ensuite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$u_n = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$$

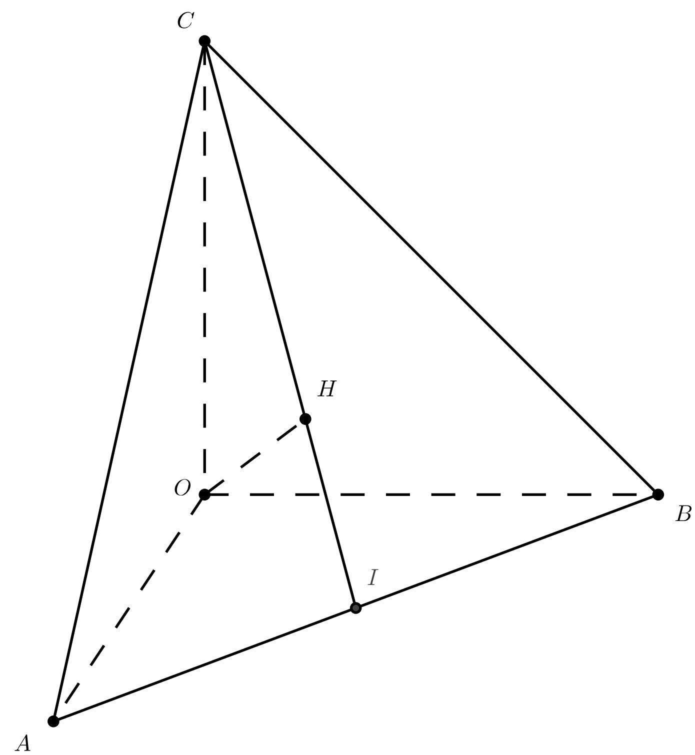
1. Sur le graphique suivant on a représenté les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



   (a) Que représentent les nombres u_1, u_2 et u_3 pour les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$?
   (b) A l'aide du graphique dire quel semble être le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pourquoi ?
2. Démontrer que le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est celui observé à la question précédente.
3. Vérifier que $\dfrac{t+1}{t+2} = 1 - \dfrac{1}{t+2}$
4. Déterminer alors $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{t+2}\mathrm{d}t$
5. Montrer alors $J\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq J$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
6. En déduire que (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

4^{me} Question (Valeur = 3)

On considère un tétraèdre $OABC$ dont les faces OAB, OAC et OAD sont des triangles isocèles rectangles.



Dans le triangle ABC, on appelle I le pied de la hauteur issue de C. Dans le triangle OIC, on appelle H le pied de la hauteur issue de O.
On considère le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de (IC)
2. Déterminer les coordonnées de H.
3. Montrer que (OH) est orthogonale au plan (ABC).

5^{me} Question (Valeur = 4)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

2. En déduire que la suite est convergente. Démontrer que sa limite est 3.
3. Voici un algorithme :

Variables :
n et p sont des entiers, u et v sont des réels.
Entrée :
Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisation :
Affecter à n la valeur 0
Affecter à u la valeur 1
Affecter à v la valeur $\sqrt{5}$
Traitement :
Tant que $v - u > 10^{-p}$
Affecter à n la valeur $n + 1$.
Affecter à u la valeur $\sqrt{2u + 3}$.
Affecter à v la valeur $\sqrt{2v + 3}$.
Sortie : Afficher n.

(a) Recopier et compléter le tableau suivant en faisant tourner l'algorithme :

p	1	2
n		

(b) Expliquer pourquoi la condition de la boucle **tant que** n'est plus vérifiée à partir d'une certaine valeur de n ce qui permet à l'algorithme de s'arrêter.

6$^{\text{me}}$ Question (Valeur = 2)

Une usine fabrique des casques de moto, en grande quantité. Ces casques contiennent de la mousse dont la densité est exprimée en kg par m^3. Dans la suite de l'exercice les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

Partie 1

La mousse fabriquée a une densité conforme lorsqu'elle est dans l'intervalle $[41,5; 42,5]$

1. On note X la variable aléatoire qui à chaque morceau de mousse prélevé au hasard dans la production, associe sa densité. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 42 et d'écart type $\sigma_1 = 0,5$. Donner la probabilité que la mousse prélevée soit conforme.
2. Le directeur de l'usine n'est pas satisfait de la qualité de la production, aussi il décide de revoir les réglages de ses machines pour que 95% soit conforme. Déterminer quelle doit être l'écart type de la production dont la densité moyenne est encore de 42 kg par m^3.

Partie 2 :

Le casque d'une moto à une durée de vie en années qui est régie par une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,46$.

1. Déterminer la probabilité que le casque ait une durée de vie supérieure à 5 ans.
2. On dispose d'un casque qui au bout de trois ans est comme neuf. Déterminer la probabilité que la durée de vie du casque soit supérieure à 8 ans.
3. L'entreprise qui fabrique ces casques vient de créer une nouvelle mousse dont la probabilité que la durée de vie du casque soit supérieure à 8 ans est de 90 %. Déterminer la valeur du paramètre λ de la loi exponentielle suivie par la durée de vie de cette nouvelle mousse.