Concours ENSM 2018

Epreuve de Mathématiques

3 questions au choix parmi 4

Soit u fonction définie sur I = ]0 ; +∞[

### Tableau de variations de u

Dérivé de u :

Racines u’(x) = 0 → pas de solutions dans R

u’(x) > 0 sur I

Tableau de variations :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 0 | + ∞ |
| u’(x) | + | |
| u(x) | - ∞ | + ∞ |

### Justifier de l’existence d’un unique réel α tel que u(α) = 0

u strictement croissante sur I de - ∞ à + ∞ donc un seul réel pour lequel u = 0

### Tableau de signes de u

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | α | + ∞ |
| u’(x) | + | | |
| u(x) | - | 0 | + |

### Montrer que

u(α) = 0 c’est la définition de α voir 1.2 ⬄

donc on a bien

Soit f fonction définie sur I = ]0 ; +∞[

### Calculer f’(x)

On sait que

Donc [

D’où :

### Variations de f(x)

X > 0 donc le signe de f’(x) est le même que celui de u(x)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | α | + ∞ |
| u(x) | - | 0 | + |
| f’(x) | - | 0 | + |
| f(x) | - ∞ | f(α) | + α |

### Montrer que :

On sait que

### Montrer que

D’où

### Déduire les coordonnées de M0 tel que AM minimale

AM minimale pour f(x) minimale donc pour x = α

AM minimale pour M de coordonnées α et ln(α)

### Montrer que

On sait que

Donc

### Droite perpendiculaires

Droites perpendiculaires si le produit de leurs coefficients directeurs est égale à -1

Tangente à Г en M0 : coefficient directeur

Droite AM0 : coefficient directeur

On a bien le produit des coefficients directeurs = -1 et les droites sont perpendiculaires

sur [0 ;+∞[

### Tableau de variations

On sait que

f’(x) toujours positive

f(x) = 0 pour x=-1/5 donc pas de solutions sur I

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | 0 | + ∞ |
| f’(x) | + | |
| f(x) | 1 | 5 |

### Equation f(x) = x

soit

Résolution équation du second degré : racines de la forme

On a donc

Solutions de l’équation

< 0 donc seul est une solution de l’équation

Valeur approchée α=4.23

### Démontrer que si

f(x) est strictement croissante

f(0) = 1 et f(α)= valeur approchée 4.23 > 1

On a donc bien si

### Calculer u1

### Courbe

### Sens de variation et convergence

On peut conjoncturer que la suite est croissante et converge vers

### Démonstration par récurrence

On veut démontrer que

Vérification pour u0 et u1 : 0 ≤ 0 < 1 < α

Hypothèse : vrai pour un :

f(x) croissante dont si alors ) soit

puisque *f(α) = α*

### Convergence et limite

Une suite croissante et majorée admet une limite appelons là l.

Si un converge l alors f(un) converge vers f(l), soit un+1 converge vers f(l) équivalent à un converge vers f(l) donc f(l) = l

La solution à l’équation (l) = l a été vu ci-dessus c’est α, donc un converge vers α.

## Comportement de la suite pour u0 quelconque.

* Si u0<α même résonnement que pour u0=0 si u0<α
* Si u0=α, la suite est constante
* Si u0>α elle est décroissante et tend également vers α :

Démonstration un décroissante si u0>α :

Hypothèse :

Vérification pour u1

Ouf !

Convergence même raisonnement : Si un converge l alors f(un) converge vers f(l), soit un+1 converge vers f(l) équivalent à un converge vers f(l) donc f(l) = l

La solution à l’équation (l) = l a été vu ci-dessus c’est α, donc un converge vers α.

A(3i) B(2i) C ()

## Affixes des points A’ et C’

## Point D dont l’image par f est i

soit

## affixes des points M tels que f(z)=z

soit

Montrer que pour tout M distinct de B

M appartient au cercle de centre B et de rayon 3 : MB = 3

M’ appartient au cercle de centre A et de rayon 2

Angle entre deux vecteurs : le produit scalaire est égal au produit de leur norme multiplié par l’angle entre eux

N est un point de Г : BN = 3, module de z-2i que l’on nomme ρ, affixe de N

Construction géométrique :

Positionner N, tracer le cercle de centre A et de rayon 3

On a

Tracer la droite d’angle α depuis A, N’ est l’intersection de cette droite avec le cercle de centre A et de rayon 2

## Alignement des points ABC

Si A, B, C alignés alors

## Aire du triangle ABC

(ABC) rectangle en C :

On a bien

Aire de ABC : AC.BC / 2

AC2=(25+25+0)=50 et BC = (4+4+4)=12

### normal au plan (ABC)

### Equation du plan (ABC)

L’équation de (ABC) est

### D appartient-il au plan (ABC) ?

D n’appartient pas à (ABC)

D orthogonal à (ABC) passant pas D

### Equation paramétrique de d

On peut définir d à l’aide du point D et de

Equation paramétrique de d :

x=0+t=t

y=2-t

z=6+2t

### Coordonnées de H intersection de d et (ABC)

H intersection de d et de (ABC)

### Distance DH

DH2 = (-2-0)2 + (4-2)2+ (2-6)2 = (4+4+16) = 24

### Volume du tétraèdre ABCD

Volume d’un tétraèdre = 1/3 aire de la base \* hauteur

Soit 1/3 (surface ABC) \* DH =

## Mesure de l’angle ADB

Avec la formule :

AD (4,2,5) et BD (-3,-1,7)

-12-2+35=21